Hoja 8. Aplicaciones lineales. Núcleos, imágenes y preimágenes

1. Se consideran las aplicaciones lineales $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 + x_2, x_3)$ y $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $g(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_3)$.

i) Calcular su núcleo y su imagen.

ii) Siendo V el subespacio $\langle (1, -1, 0), (1, 1, 1) \rangle$ calcular $f(V)$ y $g(V)$. Calcular también $f^{-1}(0, 0, 0)$ y $f^{-1}(2, 2, 1)$.

iii) Calcular $f^{-1}(W)$, siendo $W = \{(x_1, x_2, x_3)\colon x_1 = 3\lambda,\ x_2 = 2\lambda,\ x_3 = \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$.

iv) Calcular $g^{-1}(T)$ para $T =< (1, -1) >\subset \mathbb{R}^2$.

2. Dadas las siguientes aplicaciones lineales encontrar las ecuaciones paramétricas del núcleo y la imagen comprobando en cada caso la ecuación $\dim(\text{Nuc } f) + \dim(\text{Im } f) = \dim(\textit{espacio inicial})$ e indicar si son inyectivas, sobreyectivas o biyectivas:

i) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ \ f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, x_2, x_1 + x_2 + x_3)$.

ii) $f\colon \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2,\ \ f(z_1, z_2) = (iz_1 + z_2, z_1 + iz_2)$.

iii) $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4\ \ f(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, 2x_1, x_1 + 2x_2)$.

iv) $f\colon \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tiene como matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ i & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Hallar bases y ecuaciones del núcleo y de la imagen de la aplicación lineal $T : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, definida mediante multiplicación por la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. Sea $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}[x]$ el espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual a dos. Sea $f : \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}[x] \to \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}[x]$ que se caracteriza por las condiciones $f(1) = x^2 + 1$, $f(x) = x + 1$, $f(x^2) = 1$. Hallar la matriz de f^{-1} en la base $\{1, x, x^2\}$ de $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}[x]$.

5. Sea $f : \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}[x] \to \mathbb{M}_2(\mathbb{R})$ la aplicación lineal determinada por

$$f(1) = I, f(x) = A, f(x^2) = A^2$$

Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Encontrar la matriz de f respecto de las bases canónicas.

b) Encontrar bases del núcleo y de la imagen de f.

6. Sean E, F y G tres espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo. Sean f y g aplicaciones lineales $f\colon E \to F$ y $g\colon F \to G$. Demostrar que $\mathrm{Nuc}(g \circ f) = f^{-1}[\mathrm{Nuc}\ g \cap \mathrm{Im}\ f]$.

7. Sean E y F dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $\mathbb{K}$ y una aplicación lineal f de E en F. Considerando el espacio vectorial producto $E \times F$, demostrar que la aplicación g, donde $g(u,v) = (u, v - f(u)), u \in E$ y $v \in F$, es un endomorfismo de $E \times F$. Estudiar si es automorfismo.